La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté.

Eric Roditi

Eric Roditi, Université Paris Descartes, Equipe EDA

Faculté des sciences humaines et sociales - Sorbonne

LA COMPARAISON DES NOMBRES DÉCIMAUX, CONCEPTION ET EXPÉRIMENTATION D'UNE AIDE AUX ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ

Abstract. Comparing decimal numbers: an experiment to help low-level attainers
Comparing decimal numbers is not just a question of how to handle the position of the digits. Yet, teaching often only proposes this kind of procedures. Our research is based upon 400 students, from 10 to 25, as well as adults. We tried to understand which other handlings comparison activity is based upon and we tried too to pinpoint factors related to learning difficulties. We tested an intervention method involving students with learning difficulties. The experiment showed that confronting right or wrong reasoning with concrete representation of decimal numbers might prove very helpful.

Résumé. La procédure de comparaison des nombres décimaux ne repose pas seulement sur un traitement de l'écriture décimale, de la notation, qui consiste à repérer les chiffres et leur position. Pourtant l'enseignement propose souvent des procédures fondées sur ce seul type de traitement. En s'appuyant sur de nombreux travaux antérieurs menés sur ce sujet, une nouvelle recherche portant sur 400 élèves de 10 à 25 ans ainsi que sur des adultes a permis de comprendre quels traitements des nombres sont mis en œuvre dans l'activité de comparaison et de repérer des facteurs liés aux difficultés d'apprentissage. Une expérimentation a été menée par une enseignante avec les élèves les plus en difficulté. Elle a montré qu'une aide conduisant les élèves à mettre en relation plusieurs traitements des nombres dans différentes situations, et à confronter les raisonnements corrects ou erronés qui justifient ces traitements s'avère une intervention efficace pour qu'ils surmontent leurs difficultés.

Mots-clés. Nombres décimaux, représentations des nombres, comparaison des nombres, difficultés d'apprentissage, pratiques enseignantes.

Introduction

Les nombres décimaux sont indispensables au citoyen pour connaître ou estimer la valeur d'un bien, la mesure d'une longueur ou d'une surface, etc. Ils sont les seuls nombres à être affichés par les calculatrices destinées au grand public. Les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux ont produit des connaissances sur les représentations et les procédures des élèves (Brousseau, 1983, Comiti & Neyret, 1979, Grisvard & Léonard, 1981, 1983, Perrin-Glorian, 1986), des ingénieries d'enseignement (Brousseau, 1981, Douady & Perrin-Glorian) et des analyses des pratiques enseignantes (Bolon, 1995, Roditi, 2005).

Les programmes français d'enseignement ont évolué quant aux nombres décimaux. Leur enseignement n'est plus, comme il l'a été, indépendant de celui des nombres rationnels, avec pour seule représentation celle de l'usage social, ce qui avait pour conséquence de faire obstacle à la conceptualisation. Il n'est pas postérieur à celui des fractions et des nombres rationnels, mais il n'en est pas indépendant car les fractions décimales sont introduites très tôt dans l'enseignement. Les commissions d'élaboration des programmes connaissent les recherches et leurs résultats. Elles les prennent en compte, au moins partiellement. Pourtant, les évaluations nationales à l'entrée dans l'enseignement secondaire montrent des difficultés d'apprentissage persistantes des élèves (11 ans). En nous appuyant sur des travaux antérieurs, y compris parmi ceux qui concernent la comparaison des nombres entiers, nous cherchons à mieux comprendre les traitements mis en œuvre dans l'activité de comparaison des nombres décimaux. Nous cherchons aussi à identifier, par des analyses croisées, des relations entre les difficultés à effectuer des comparaisons et les difficultés à effectuer d'autres tâches portant sur les nombres. À partir des résultats obtenus, nous avons conçu un scénario utilisable par les enseignants pour aider leurs élèves à surmonter leurs difficultés. Ce scénario a été expérimenté, nous en proposons ici une évaluation[1].

Dans la première partie de ce texte nous indiquons nos cadres de référence ainsi que les résultats des travaux qui nous conduisent à admettre certaines hypothèses quant à la connaissance du nombre, qu'il soit entier ou décimal, mais aussi à en poser de nouvelles, à tester cette fois, au sein d'une problématique générale concernant les difficultés d'apprentissage des nombres décimaux et les aides qui pourraient être apportées aux élèves qui les rencontrent. Dans la deuxième et la troisième partie nous traitons respectivement des difficultés et des aides : nous spécifions la problématique, nous explicitons la méthodologie adoptée et nous indiquons les résultats obtenus. Nous discutons enfin ces résultats pour en montrer la portée et en indiquer les limites, tant sur la comparaison des nombres décimaux que sur le scénario d'aide que les enseignants pourraient adopter.

1. Cadres et travaux de référence, problématique générale

1.1. La double approche des pratiques enseignantes

Les aides qu'apporte l'enseignant en classe font partie de sa pratique professionnelle. Il nous semble indispensable de les considérer au sein de la globalité de sa pratique, en effet, en référence à la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes (Robert & Rogalski, 2002) nous admettons que les pratiques sont à la fois complexes et cohérentes et que cela leur

[1] Cette recherche doit beaucoup à Florence MONFRINI – CRÉPIN que je remercie vivement.

confère une grande stabilité après quelques années d'exercice. Nous avons donc choisi, pour proposer de nouvelles formes d'aides aux enseignants, non seulement de concevoir ces aides en fonction des résultats concernant les élèves et leur apprentissage, mais aussi de les concevoir avec des enseignants, en fonction de leurs pratiques.

Quelques précisions sur ce que recouvre ici l'expression « pratiques enseignantes ». Nous en distinguons cinq composantes dans nos analyses. composantes *cognitive* et *médiative* concernent les mathématiques proposées aux élèves et les formes de travail effectives avec les élèves (notamment les aides). Les composantes *institutionnelle*, *sociale*, *personnelle* concernent des déterminants des pratiques, intérieurs ou extérieurs à la classe, qui à la fois contraignent et soutiennent l'enseignant dans son travail. Il s'agit par exemple, pour illustrer ces trois composantes, des programmes et des moyens horaires d'enseignement, des normes professionnelles quant à l'organisation de l'enseignement et la gestion d'une classe, des conceptions de l'enseignant quant aux mathématiques, à leur apprentissage et à leur enseignement. Notre approche des pratiques enseignantes est double car nous les considérons à la fois pour leur contribution à l'apprentissage des élèves, et pour les réponses qu'elles apportent contraintes personnelles et professionnelles.

1.2. Cadres et travaux concernant l'apprentissage des mathématiques

Dans la théorie des champs conceptuels, Vergnaud définit un concept par les situations qui lui donnent du sens (la référence), les invariants sur lesquels repose l'efficacité des schèmes (le signifié), et les formes langagières et non langagières qui lui sont associées (le signifiant). Selon cette théorie, pour tout sujet, le concept de nombre réfère donc aux situations qu'il a rencontrées, situations dont le traitement fait intervenir des nombres. Des situations de dénombrement, de mesure ou de comparaison, ou encore des situations plus complexes conduisant par exemple à composer ou à comparer des mesures de grandeurs et nécessitant d'effectuer des calculs.

Les didacticiens des mathématiques et notamment Brousseau (1998) ont renouvelé la notion de situation en lui conférant en particulier une dimension cognitive. Une situation didactique est ainsi une situation problématique, et le savoir mathématique, éventuellement à construire par l'élève, à adapter ou plus simplement à utiliser, est un moyen de résoudre le problème que pose la situation. Lors de sa construction, le savoir n'est pas reconnu comme tel dans la classe, il est *contextualisé*. C'est la *décontextualisation* qui permet d'identifier le savoir indépendamment de la situation didactique qui a permis sa construction en classe. En référence à Brousseau, et en élargissant ces termes à toutes les tâches mathématiques proposées aux élèves, nous distinguons dans ce texte, les tâches où les nombres à comparer sont contextualisés de celles où ils ne le sont pas.

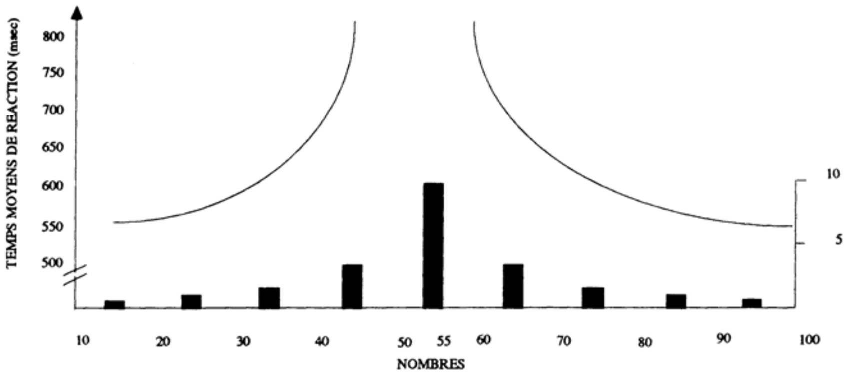
Le cadre de la didactique des mathématiques est notre référence majeure quant à l'apprentissage des mathématiques, nous reprenons les hypothèses généralement admises dans ce champ scientifique. Nous supposons que l'apprentissage dépend des situations étudiées, en classe notamment, pour le contenu mathématique qu'elles comportent, mais aussi pour l'organisation de la rencontre entre l'élève et le savoir. Afin d'analyser cette organisation, nous repérons les dynamiques ancien / nouveau (notamment dans le passage des nombres entiers aux nombres décimaux), les dialectiques outil / objet des savoirs (Douady, 1986), les dynamiques contextualisations / décontextualisation (au sens défini précédemment par référence à Brousseau), les registres de représentations des nombres et les changements qui sont proposés (Duval, 1995). Concernant plus précisément les tâches proposées aux élèves nous repérons la responsabilité mathématique qui lui est réservée (ce que Chevallard, 1999, désigne par le *topos* de l'élève) et nous utilisons pour cela les outils d'analyse de tâches développés par Robert (2005). Nous appuyant sur les travaux de Vygotski (1985), nous supposons également que les médiations jouent un rôle important dans l'apprentissage, notamment les aides individuelles ou collectives pour orienter ou réorienter la réflexion des élèves, en distinguant celles qui visent la réalisation de la tâche proposée de celles qui visent directement l'apprentissage, par exemple l'organisation des connaissances mathématiques.

1.3. Références concernant les nombres et leur apprentissage

Les premières recherches concernant l'acquisition du nombre par l'enfant ont montré que le nombre se construit à la fois suivant ses deux aspects cardinal et ordinal : à la fois le nombre dit combien et se situe par rapport aux autres nombres. MELJAC (2001) explique à ce propos la pensée de Piaget exprimée dans le paragraphe ultime de *La genèse du nombre* : « *le nombre doit être appréhendé comme la synthèse de la relation symétrique (égalité) et des différences (relations asymétriques) … Il s'élabore progressivement grâce à ce que Piaget a appelé l'abstraction réfléchissante.* » Des travaux plus récents sur l'apprentissage des entiers montrent l'importance de distinguer les aspects sémantiques (valeur) et syntaxiques (notation) (Perret, 1985) en ce qui concerne les formes langagières associées aux nombres. Newman & Berger (1984) d'une part et DeBlois (1996) d'autre part ont montré que certains enseignements contribuent à développer respectivement un jugement sur la numérosité, et une idée de distance entre les nombres dans des activités de comparaison. Par ailleurs, Collet (2003) a montré l'influence des systèmes de représentation des nombres (orale, décimale, iconique) sur leur conceptualisation.

Les recherches sur les conceptions et les procédures des élèves quant aux nombres décimaux, ont établi que, pour certains élèves, tout se passe comme s'ils traitaient les nombres décimaux comme des couples de deux entiers séparés par une virgule. Constatant par exemple que des enfants écrivent $1{,}38 < 1{,}275$, Comiti & Neyret (1979) montrent que l'enseignement favorise l'idée selon laquelle les décimaux sont constitués d'une partie entière et d'une partie fractionnaire qui se traitent comme des entiers. Grisvard & Léonard (1981) ont montré que d'autres élèves écriraient au contraire que $1{,}38 > 1{,}475$ en mobilisant une règle implicite selon laquelle la partie décimale est d'autant plus petite que le nombre de ses chiffres est grand. Brousseau (1980) évoque aussi des erreurs de calcul issues d'un traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale comme $2{,}3 \times 2{,}3 = 4{,}9$. Perrin-Glorian (1986) a montré que certains élèves devant représenter 2,3 mobilisent ce qu'elle nomme une conception « galette » des fractions et des décimaux et représentent une galette circulaire séparée en deux parties par un diamètre horizontal où la partie supérieure est partagée en deux et où la partie inférieure est partagée en trois parts, ces parts n'étant même pas équivalentes.

Des travaux menés en psychologie, rappelés par Fayol (1990) dans sa synthèse *L'enfant et le nombre*, ont montré que lorsqu'un contenu est organisé linéairement par une relation d'ordre (ordre des nombres, des lettres ou des événements), toute tâche de jugement portant sur l'ordre de deux éléments de ce contenu fait apparaître un effet dit de « distance symbolique ». Il faut ainsi plus de temps pour comparer 53 et 55 que pour comparer 82 et 55. Hinrichs, Yurko et Hu (1981) ont mesuré le temps de réaction et les erreurs commises dans une tâche de comparaison de nombres variables au nombre fixe 55. Ils obtiennent des résultats représentés par le graphique suivant où figurent la courbe de tendance du nuage des points représentant les temps de réaction obtenus et le diagramme en barres représente les taux d'erreurs moyens.



De tels résultats montrent que pour comparer deux nombres entiers à deux chiffres, l'activité d'un sujet ne se décrit pas par un algorithme syntaxique selon lequel on commence par comparer les chiffres de dizaines puis, en cas d'égalité, on compare les chiffres des unités. En effet, sous une telle hypothèse, les temps de réponse ne devraient pas différer significativement en comparant par exemple 28, 47 ou 89 à 55 (le seul traitement des dizaines suffit), ils devraient en revanche différer significativement pour comparer par exemple 52 à 55 (deux traitements nécessaires : comparaison des dizaines puis des unités).

Ces travaux et d'autres menés en neuropsychologie ont amené Dehaene & Cohen (1995) à élaborer un modèle anatomo-fonctionnel appelé « modèle du triple code » selon lequel les nombres sont représentés dans le cerveau par un code visuel permettant la lecture et l'écriture des nombres, un code verbal pour les entendre et de les dire, et un code analogique pour en connaître la magnitude. Dehaene & Cohen interprètent l'effet de distance symbolique entre les nombres par l'utilisation du code analogique. Selon lui, pour comparer les nombres, les sujets mettent en œuvre un traitement sémantique lié à la magnitude et non un traitement syntaxique. Il n'y a pas, à notre connaissance, d'étude qui permettrait de confirmer ou d'infirmer ce type de résultats quant à la comparaison des décimaux.

Ces résultats portent donc sur les procédures mises en œuvre par des personnes qui ont appris à comparer des entiers et pour lesquelles cette activité ne pose pas de problème. Ils peuvent donc être utilisés pour élucider des éléments du fonctionnement normal d'un sujet ou pour faire état de ses difficultés par comparaison avec la norme. Ils ne nous aident pas en revanche à comprendre comment s'acquièrent ces éléments qui constituent ce fonctionnement normal. Dans le modèle du triple code de Dehaene & Cohen en effet, les nombres ne réfèrent ni aux situations qu'ils permettent de traiter, ni aux schèmes mis en œuvre dans ces traitements ; on est loin de la théorie développementale piagétienne. Ainsi, depuis près d'un siècle, la recherche a accumulé une importante somme de savoirs sur le concept de nombre et sa construction, elle a produit des théories en partie complémentaires et contradictoires. L'analyse et l'interprétation des erreurs, qui sont indispensables pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés, dépendent pourtant fortement de ce qui est retenu dans le modèle théorique convoqué pour mener ces analyses et ces interprétations. Comme nous l'avons déjà écrit (Roditi, 2005), « le chantier important qui conduira à une articulation de ces modèles reste encore ouvert ». Cela impose à chaque chercheur d'indiquer précisément ce qu'il retient pour mener ses analyses.

1.4. Hypothèses admises et problématique générale de la recherche

En nous référant aux résultats des travaux que nous avons cités, menés en didactique des mathématiques et en psychologie, nous supposons que l'aspect sémantique des nombres décimaux porte à la fois sur la valeur exacte du nombre et sur ses approximations. Nous admettons que connaître un nombre, c'est connaître non seulement sa valeur avec ses différentes représentations (orale, iconique, numérale et numérique [2]), mais aussi le situer par rapport aux autres, y compris dans des situations où le nombre est une mesure. Rejoignant l'analyse de Adjiage et Pluvinage (2007) concernant les nombres rationnels, nous considérons que la connaissance d'un nombre décimal est complexe et suppose à la fois de pouvoir le mobiliser dans ses différentes situations de référence, de pouvoir l'utiliser dans les différents registres de représentation sémiotique, et enfin de pouvoir l'utiliser en articulant situations et représentations. Dans la réalisation d'une tâche nous tenons compte à la fois de la production consécutive à la réalisation de la tâche et de la réflexion qui accompagne cette réalisation.

Trois groupes de questions structurent la deuxième partie de l'article suivant. Le premier groupe porte sur l'identification de procédures mises en œuvre dans la comparaison des nombres décimaux. Il s'agit notamment de savoir si, comme dans le cas de la comparaison des nombres entiers, on identifie un effet de distance dans les tâches de comparaison des nombres décimaux ou si, dans ce cas précis, le traitement syntaxique de l'écriture décimale est la procédure dominante. La deuxième question est celle de l'évolution favorable ou défavorable des difficultés avec l'âge : les élèves qui ne suivent plus d'enseignement des nombres décimaux progressent-ils spontanément du fait de la diversité des situations sociales où ils les rencontrent ou au contraire les difficultés rencontrées à l'école se renforcent-elles une fois quittée l'école ? Le troisième groupe de questions porte sur les relations entre la capacité à comparer les nombres décimaux et la capacité à les reconnaître ou à les représenter à l'aide de différentes représentations (numérale verbale ou numérique décimale et fractionnaire) et dans différentes situations, par exemple avec de la monnaie, sur une graduation ou par une fraction de surface.

L'objectif de la recherche est, rappelons-le, de mieux comprendre les difficultés auxquelles sont confrontés les élèves pour comparer des nombres décimaux, afin de concevoir un scénario d'aide qui pourrait leur être apportée et qu'ils puissent ainsi les surmonter. C'est en fonction des résultats obtenus et de leur interprétation d'une part, et d'éléments concernant les pratiques des enseignants d'autre part, qu'a été élaboré le scénario d'aide aux élèves en difficulté. Il a été expérimenté et nous en proposerons une description et évaluation dans la troisième partie.

[2] En français, la représentation orale du nombre composé de deux dizaines et d'une unité est « [vɛ̃teœ̃] », sa représentation numérale est « vingt et un » et sa représentation numérique est 21. Une représentation iconique de ce nombre est par exemple : ⍁⍁ ⍁⍁ |.

2. Procédures et difficultés dans la comparaison des décimaux

Dans cette partie, nous abordons les questions que nous venons d'indiquer sur les procédures de comparaison des nombres décimaux et sur les difficultés que rencontrent les élèves, la partie suivante est consacrée au scénario d'aide. La méthodologie relative à cette partie de la recherche repose sur deux questionnaires. Le premier, informatisé et chronométré, a été soumis à des adultes : ils devaient comparer un nombre décimal variable à un nombre fixe. Les temps de réponses seront interprétés pour rendre compte d'un éventuel « effet distance » dans cette activité. Le second questionnaire a été proposé à 400 élèves âgés de 10 à 25 ans. Il porte sur des activités de comparaison de nombres décimaux, dans des contextes de mesure ou en dehors. Il propose aussi des tâches de reconnaissance et de représentation des nombres décimaux. Les analyses des réponses aux questions permettront de retrouver les résultats des recherches antérieures, les analyses croisées des réponses permettront d'interpréter les difficultés des élèves et de suivre leur évolution avec l'âge.

2.1. Effet distance dans la comparaison des décimaux, interprétations

En nous inspirant de la tâche de comparaison d'un nombre entier au nombre 55, nous avons conçu une épreuve de comparaison d'un nombre variable décimal à un nombre fixe. Cette épreuve chronométrée a été passée par 40 adultes qui n'avaient pas de difficulté pour comparer des décimaux.

2.1.1. Choix des nombres décimaux

Nous voulions proposer des nombres décimaux inférieurs ou supérieurs au nombre fixé, sans que la partie entière soit déterminante. Revient-il au même de comparer 19,35 à 19,72 que de comparer 0,35 à 0,72 ? Si c'est la différence entre les nombres qui est le facteur déterminant, ces comparaisons sont équivalentes, si c'est plutôt leur rapport, alors ces deux comparaisons ne le sont pas. En effet la différence relative entre 19,72 et 19,35 est inférieure à 2% alors que celle entre 0,35 et 0,72 est supérieure à 100%. Cette question relative à la proximité des nombres a déjà été rencontrée lors d'une de nos recherches précédentes où nous demandions à des élèves de placer la virgule au produit de deux décimaux en utilisant les ordres de grandeur de ces nombres (Roditi, 2000). Pour ces raisons, nous avons choisi comme nombre fixe, un nombre de partie entière nulle situé approximativement à égale distance de 0 et 1. Nous n'avons pas choisi 0,5 qui n'a qu'une décimale, nous avons évité 0,55 à cause de la répétition des 5, nous avons finalement choisi 0,56. Il nous a ainsi été possible de le comparer aussi bien à des valeurs supérieures qu'à des valeurs inférieures (valeurs comprises entre 0 et 0,56), en faisant varier de manière importante les différences relatives, tout en gardant des nombres ayant la même partie entière.

La liste de nombres à comparer à 0,56 a été élaborée afin de tester l'effet de distance. Nous avons donc choisi des nombres proches et d'autres plus éloignés de 0,56, par valeur inférieure et supérieure. Nous avons choisi des nombres inférieurs à 0,56 (par exemple 0,097) puis pour chacun d'entre eux nous avons adjoint à la liste le nombre symétrique par rapport à 0,56 (avec le même exemple 0,097 nous avons adjoint 1,023 car 0,56 = (0,097 + 1,023) / 2) ainsi que le nombre dont le rapport à 0,56 est le même que celui de 0,56 au nombre choisi (avec le même exemple 0,097 nous avons adjoint 3,23 car 3,23/0,56 = 0,56/0,097). Sans contredire ce principe, nous avons parfois réduit le nombre de décimales pour que les nombres proposés restent comparables quant à leur lisibilité. La liste des nombres ainsi établie est donnée en annexe.

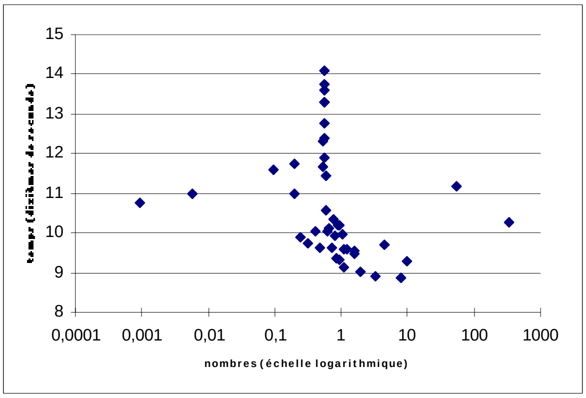
2.1.2. Déroulement de l'épreuve de comparaison

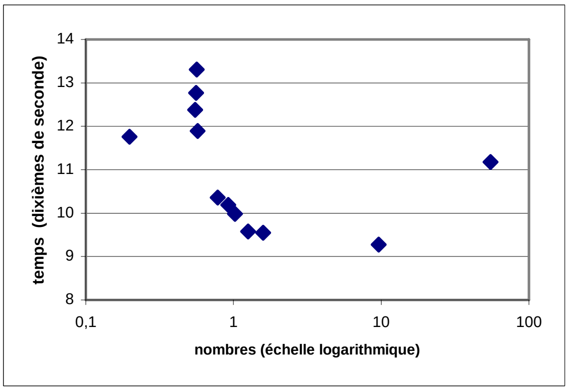
Quarante adultes âgés de 25 à 60 ans ont répondu à notre questionnaire. L'épreuve de comparaison s'est déroulée à l'aide d'un programme informatique qui a été élaboré à cette fin. Comme le montre la copie d'écran ci-contre, le nombre de référence 0,56 est affiché en permanence. Les nombres à lui comparer apparaissent en dessous. Le sujet doit alors appuyer sur la touche « A » si le nombre qui apparaît est inférieur à 0,56 et sur la touche « P » si ce nombre est plus grand. Ces touches ont été ainsi choisies, parce qu'elles se situent respectivement à gauche et à droite du clavier, conformément à l'orientation conventionnelle de l'axe numérique. Des travaux antérieurs ont montré que la latéralité des sujets est sans influence sur le temps de réponse.

Les nombres apparaissent trois fois chacun au cours de l'épreuve et dans un ordre aléatoire, de manière à ce que la variation des temps de réponse ne soit pas imputable à l'ordre d'apparition des nombres. Le programme mesure le temps (en dixièmes de seconde), entre l'apparition du nombre sur l'écran et la réponse du sujet. Les temps correspondant à des réponses inexactes n'ont pas été retenus.

2.1.3. Des résultats qui affinent ceux trouvés sur les nombres entiers

Le premier graphique représente des temps moyens de réponse pour chaque nombre proposé. Malgré les irrégularités que nous allons interpréter, l'allure générale confirme l'existence d'un effet distance dans la comparaison des nombres décimaux : lorsque les valeurs s'éloignent du nombre de référence, les temps de réactions diminuent. Pour proposer des nombres de plus en plus proches de 0,56, il a fallu augmenter le nombre de décimale ; en supposant un traitement syntaxique important dans la procédure de comparaison, on pourrait interpréter le graphique en affirmant le nombre de décimales des nombres à comparer à 0,56 explique l'allongement du temps de réponse au voisinage de 0,56. Mais le second graphique qui représente les temps moyens de réponse pour chaque nombre dont la partie décimale comporte trois chiffres réfute cet argument et conduit à admettre un effet distance.





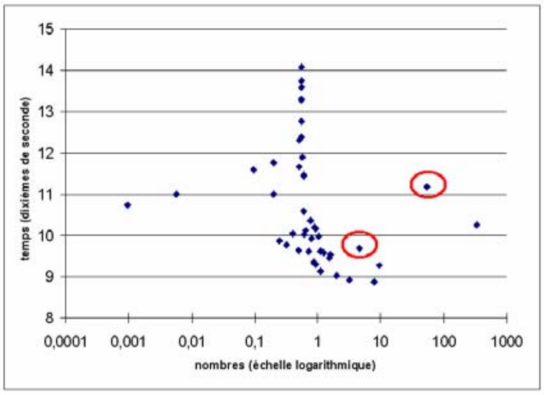
Néanmoins, l'impact du nombre de décimales n'est pas négligeable, il explique certaines irrégularités du graphique. Citons par exemple quelques valeurs éloignées de 0,56 où apparaissent en caractère gras les décimaux dont le nombre de décimales est différent de deux et pour lesquelles on constate une augmentation du temps de réponse [3].

Nombres à comparer à 0,56	0,64	0,72	**0,784**	**0,8**	0,87
Temps de réponse (1/10 s)	10,1	9,6	**10,4**	**9,9**	9,4

On remarque ensuite les temps de réponse moyens correspondant au plus grand nombre (330,11) comme aux plus petits (0,00095 et 0,0057) sont assez élevés,

[3] Dans le tableau suivant, la différence entre deux moyennes consécutives est significative au seuil de 5%.

on peut penser que le nombre de chiffres à lire est un facteur explicatif. On remarque enfin deux irrégularités (entourées dans le graphique ci-contre) qui correspondent aux nombres 4,55 et 55,017. Nous supposons que le « 55 », figurant dans les écritures chiffrées de ces deux nombres, perturbe la comparaison. En effet, bien que 55 soit inférieur à 56, ces deux nombres sont supérieurs à 0,56. Une recherche complémentaire pourrait étudier de manière plus approfondie l'impact de la perception visuelle des nombres sur la prise de sens.



En conclusion, il apparaît que le temps de réponse subit des variations autour d'une tendance générale liée à l'effet distance. Ces variations proviennent de différents facteurs comme le nombre de chiffres des décimaux à comparer ou le nombre de leurs décimales. Le seul traitement sémantique lié à la magnitude repéré dans la comparaison des entiers apparaît comme une conséquence des choix expérimentaux : en restreignant les comparaisons à des nombres entiers à deux chiffres, le facteur issu du traitement syntaxique lié au nombre de chiffre a été fixé. L'effet distance n'est donc pas le seul facteur explicatif du temps de réponse, il apparaît plutôt que dans une activité de comparaison, un traitement sémantique est mis en œuvre simultanément à un traitement syntaxique qui permet la lecture des nombres. C'est l'hypothèse que nous adoptons, et qui nous permet de suggérer une piste interprétative des difficultés des élèves : les méthodes enseignées pour comparer les nombres décimaux convoquent le plus souvent un traitement syntaxique des écritures décimales, sans doute la plupart des élèves se représentent ce faisant les nombres à comparer de manière suffisante pour effectuer la comparaison, mais certains d'entre eux focalisent sur le traitement syntaxique et se retrouvent en difficulté pour comparer des nombres décimaux.

2.2. Étude de facteurs de difficulté à comparer des décimaux

Le deuxième questionnaire a pour objectif de repérer les élèves en difficulté pour comparer des nombres décimaux et de croiser ces difficultés avec différents facteurs dont certains ont déjà été soulignés dans les travaux antérieurs. Les autres facteurs nous sont inspirés par nos choix théoriques, ils concernent notamment les situations qui donnent du sens aux décimaux, et les registres de représentation des nombres. Les facteurs étudiés sont bien sûr les procédures utilisées dans les comparaisons de décimaux donnés hors contexte, le fait que les décimaux soient ou non donnés dans un contexte qui donne du sens aux nombres, la capacité à reconnaître ou à représenter des décimaux dans différents contextes ou à passer d'un registre de représentation à un autre. Nous étudions aussi l'effet du facteur âge sur la réussite aux tâches de comparaison pour savoir si une fois quittée l'école, les élèves rencontrent dans la vie courante suffisamment de situations où la comparaison de décimaux est nécessaire pour acquérir finalement cette compétence. Ou si au contraire certains élèves restent toujours en difficulté dans cette activité.

Au total 51 questions composent le questionnaire, elles étaient suffisamment faciles pour ne pas décourager les élèves ; 39 portent directement sur la comparaison de deux ou plusieurs nombres décimaux, dont 28 hors contexte, et 12 portent sur les registres de représentation des décimaux. Parmi les 28 hors contexte, 8 questions portent sur la comparaison de deux décimaux donnés oralement.

2.2.1. Choix des élèves interrogés, résultats globaux

Le choix des élèves interrogés est fonction des programmes d'enseignement des nombres décimaux : introduction au CM1 et approfondissement en 4^e avec les puissances de 10. Nous avons questionné des élèves de CM2, 6^e et 5^e (10 à 12 ans pour les élèves sans retard scolaire) ainsi que des élèves de lycée professionnel (16 à 21 ans pour les élèves sans retard scolaire). Nous n'avons interrogé aucun élève de CM1 ou de 4^e pour éviter que les résultats soient influencés par les choix de progression de l'enseignement de leur enseignant. Les élèves de lycée professionnel sont de jeunes adultes, ils ont été choisis afin d'étudier l'effet du facteur âge sur la capacité à comparer des décimaux, sans suivre l'évolution des performances d'une même population durant plusieurs années. L'orientation des élèves en lycée professionnel s'effectue généralement lorsqu'ils sont en difficulté dans l'enseignement secondaire, nous supposons donc que ceux que nous avons interrogés n'étaient pas parmi les élèves les moins en difficulté quand ils avaient de 10 à 12 ans. Au total 402 élèves ont été interrogés dont une centaine par niveau scolaire.

Dans le domaine que nous étudions, la réussite seule n'est pas un critère satisfaisant puisque des réponses correctes peuvent être obtenues avec des démarches erronées. Indiquons néanmoins que sur les 39 questions de comparaison, la réussite moyenne de l'ensemble des élèves interrogés est de 34,2 avec un écart-type de 4,9. Le groupe dont le nombre de réussites est faible (inférieur à la moyenne moins un écart type) comporte 58 élèves, sa composition est donnée par le tableau suivant.

Niveau	CM2	6^{e}	5^{e}	LP	Ensemble
Effectif total	92	117	86	107	402
Groupe faible	24	17	11	6	58
Fréquence	26%	15%	13%	6%	14%

2.2.2. Effet de l'âge « scolaire » sur la réussite aux tâches de comparaison

Afin de rendre compte de l'évolution avec l'âge de la réussite aux tâches de comparaison, nous considérons les quatre groupes d'élèves constitués par le niveau scolaire (CM2, 6^{e}, 5^{e}, LP). Le tableau ci-dessous indique l'âge moyen au sein de chaque niveau au moment de la passation du questionnaire et le nombre moyen de réussite aux 39 questions de comparaison.

Niveau	CM2	6^{e}	5^{e}	LP
Âge moyen	10 ans 7 mois	11 ans 6 mois	12 ans 8 mois	18 ans 10 mois
Réussite moyenne m	31,90	33,93	34,64	36,33

On constate que le nombre moyen de réussite est croissant. Un test d'analyse de la variance au seuil de 1% confirme que les réussites moyennes des quatre groupes sont significativement différentes. Nous concluons donc à une amélioration de la comparaison des nombres décimaux avec l'âge « scolaire », et cela bien que les plus âgés aient été choisis dans un type d'établissements qui regroupent des élèves en difficulté d'apprentissage.

Poursuivons l'analyse afin d'évaluer la présence éventuelle d'élèves en difficulté parmi les plus âgés. Nous considérons comme étant en difficulté les élèves de lycée professionnel qui appartiennent au groupe dont le nombre de réussites aux tâches de comparaison est faible. C'est le cas pour 6% d'entre eux. Ainsi, même si le développement et l'expérience des personnes apparaissent comme des facteurs favorables, ils ne sont pas suffisants pour résorber les difficultés.

2.2.3. Règles utilisées pour comparer deux décimaux

Les questions de comparaison de deux décimaux sont posées pour retrouver les résultats des travaux antérieurs et pour les croiser avec deux facteurs : la présence ou non d'un contexte, et l'aptitude à passer d'un registre de représentation des décimaux à un autre. Les « règles implicites » fréquemment utilisées par les élèves pour comparer deux décimaux (dans le cas difficile où les parties entières sont égales et où les parties décimales n'ont pas le même nombre de chiffres) ont déjà été élucidées :

- R1 : le plus petit nombre est celui dont la partie décimale est la plus petite ;
- R2 : le plus petit nombre est celui dont la partie décimale a le plus de chiffres ;
- R3 : si la partie décimale d'un des nombres a pour premier chiffre 0, c'est le plus petit.

Parmi les douze questions portant sur la comparaison de deux décimaux donnés par écrit, six conduisent à l'erreur en cas de mise en œuvre de la règle R1. Le nombre d'élèves qui commettent une erreur à ces questions varie, suivant les questions, de 20 à 35, c'est-à-dire représente 5% à 9% des élèves interrogés. Parmi les 58 élèves du groupe dont le nombre de réussite est faible, le nombre d'erreurs imputables à R1 varie de 20 à 35, c'est-à-dire concerne 34% à 60% des élèves. Trois questions conduisent à l'erreur en cas de mise en œuvre de la règle R2 ; le nombre d'erreurs à ces questions varie de 11 à 14, et concerne donc 3% des élèves environ. Les trois autres questions portent sur des nombres dont les parties entières étaient différentes. Sur les 58 élèves du groupe faible, les erreurs imputables à R2 varient de 9 à 11 et concernent donc 16% à 19% d'entre eux. Parmi les six questions conduisant à l'erreur en cas d'application de la règle R1, trois questions permettaient de réussir en appliquant la règle R3. Pour suspecter une utilisation de R3 comme amélioration de R1, nous avons déterminé les élèves qui se trompent aux trois questions où R1 conduit à l'erreur et réussissent néanmoins les trois questions où l'application de R3 permet de réussir. On obtient sept élèves (2%) dans ce cas, dix (3%) si l'on accepte une exception à cette combinaison de réponses et vingt-trois (6%) si l'on en accepte deux.

Les résultats confirment donc une utilisation des règles R1, R2 et R3 par certains élèves, pas forcément de manière systématique d'ailleurs. La règle R2 n'a pas jamais été utilisée par les élèves de lycée professionnels. Tout se passe comme si cette règle se construisait pendant l'enseignement, pour pallier les erreurs commises en utilisant la règle R1, mais qu'elle disparaissait une fois quittée l'école. En revanche sur les sept élèves qui utilisent R3 pour améliorer R1, on en trouve quatre en lycée professionnel.

2.2.4. Effet de la présentation orale ou écrite des nombres décimaux

En plus des douze questions de comparaisons de deux nombres décimaux donnés par écrit, huit questions proposent de comparer deux nombres donnés oralement, la consigne étant toujours de repérer le plus grand des deux. La comparaison des résultats montre que la présentation orale accroît la difficulté de la comparaison. Le pourcentage de réponses erronées passe de 5,1% lorsque les nombres sont donnés par écrit à 11,1% lorsqu'ils sont donnés oralement. Un test de comparaison des proportions au seuil de 1%, effectué selon la méthode du khi-2, confirme cette différence. Il en est de même pour les 58 élèves du groupe faible : le pourcentage d'erreurs dans ce groupe passe de 29,2% lorsque les nombres sont donnés par écrit à 41,4% lorsqu'ils sont donnés oralement.

De ces résultats nous tirons une hypothèse pour la conception du scénario d'aide à apporter aux élèves en difficulté, les aides ne seront pas données seulement oralement, les discours de l'enseignant seront accompagnés de supports visuels, notamment pour communiquer sur les nombres décimaux.

2.2.5. Effet du contexte donnant du sens aux nombres à comparer

Pour certains décimaux dont la comparaison est demandée hors contexte, des questions portent sur leur comparaison dans un contexte qui donne du sens aux nombres, même si l'usage social n'est pas respecté : une longueur ou un prix avec une seule décimale, par exemple. Une question porte ainsi sur la comparaison hors contexte de 14,17 et 14,036 ; une autre est posée dans un contexte : « Léa et Manu comparent leurs moyennes. Celle de Manu est 14,17 et celle de Léa est 14,036. Qui a la meilleure moyenne ? » Une question porte sur la comparaison hors contexte de 1,21 et 1,4 ; une autre est posée dans un contexte : « Manu mesure 1,21 m. Léa mesure 1,4 m. Qui est le plus grand ? » Au total neuf questions hors contexte sont appariées à neuf questions en contexte.

La variation de réussite aux comparaisons de deux décimaux suivant que la question est posée hors contexte ou en contexte, montre que le contexte ne change pas totalement la difficulté rencontrée dans les tâches de comparaison. Néanmoins, on remarque un effet différent suivant que les élèves appartiennent au groupe faible ou non.

	Nombre d'erreurs		Fréquence des erreurs	
	Hors contexte	En contexte	Hors contexte	En contexte
Ensemble (402)	175	240	4,8%	6,6%
Groupe faible (58)	127	109	24,3%	20,8%
Groupe non faible (344)	48	131	1,5%	4,2%

Ainsi les élèves dans leur ensemble commettent plus d'erreurs dans les comparaisons en contexte que dans les comparaisons hors contexte. Les élèves du groupe faible commettent à peu près autant d'erreurs dans les comparaisons en contexte que dans les comparaisons hors contexte (pas de différence significative au seuil de 5%). Ce sont donc les élèves les moins en difficulté qui sont le plus gênés par les comparaisons en contexte, pour lesquelles ils commettent près de trois fois plus d'erreur. Un test d'indépendance selon la méthode du khi-2 au seuil de 1% confirme que les résultats des élèves du groupe faible sont significativement différents de ceux des autres.

L'interprétation de ces résultats contrastés est difficile, il apparaît que l'accès au sens du nombre ne s'effectue pas de la même façon pour tous les élèves. Deux hypothèses pourraient expliquer cette différence :

- pour les élèves qui ne sont pas en difficulté, l'écriture suffirait à accéder au sens du nombre (combien il dit et comment il est situé par rapport aux autres) et à effectuer des comparaisons, le contexte serait alors un ensemble d'informations supplémentaires à gérer, qui pourraient parfois induire en erreur, par exemple lorsque le contexte facilite l'utilisation de règles inexactes. Pour ces élèves, comparer 1,21 et 1,4 est plus facile que comparer 1,21 m et 1,4 m parce que, comme l'ont montré de nombreux auteurs, le système des unités et des sous-unités induit une utilisation de la règle R1 ;
- pour les élèves du groupe faible, l'écriture seule ne suffirait pas à accéder au sens du nombre (peut-être pour ces élèves est-il difficile de savoir combien il dit, sans savoir de quoi). Le contexte pourrait jouer alors un rôle facilitant, mais pas suffisant pour contrer des règles implicites fortes de traitement syntaxique des écritures numériques. Les réussites ne sont, par conséquent, pas significativement plus nombreuses en contexte que hors contexte.

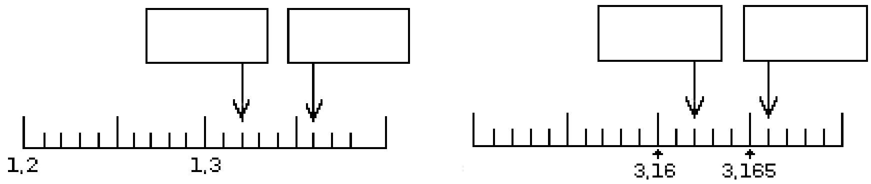
Dans la perspective d'élaboration d'un scénario d'aide aux élèves en difficulté, nous envisageons de proposer aux élèves des situations facilitant l'accès au sens des nombres et permettant simultanément de confronter ce sens à des traitements syntaxiques des écritures numériques, comme les règles R1 ou R2.

2.2.6. Croisement entre comparaison et registres de représentation

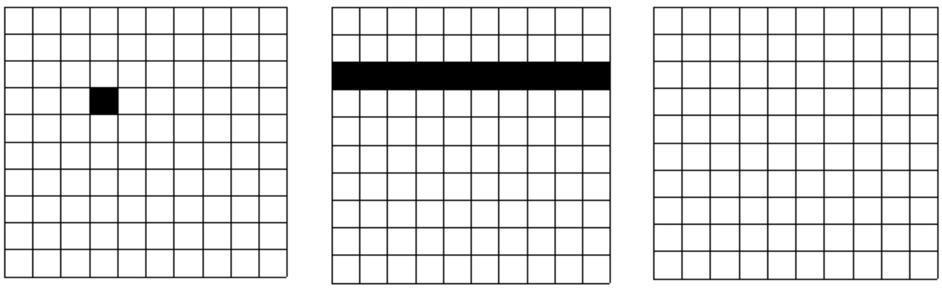
Quatre registres de représentation des nombres décimaux figurent dans le questionnaire, deux symboliques et deux graphiques.

Quatre questions proposent de passer de l'écriture à virgule à une écriture sous forme de somme de fractions décimales ou le contraire. Ainsi par exemple les élèves devaient changer 7,032 en $7+\frac{3}{100}+\frac{2}{1000}$, et $13+\frac{8}{10}+\frac{3}{100}$ en 13,83.

Trois questions demandent de lire des nombres décimaux représentés par des marques de graduation sur une droite et de les représenter par leur écriture décimale.



Dans cinq questions, un carré quadrillé représente l'unité composée de 100 centièmes. Deux questions demandent de lire un nombre décimal représenté par des petits carrés noircis (0,1 et 0,01), trois questions demandent de représenter des décimaux de manière analogue (0,3 ; 0,05 et 0,12).



Confirmant les résultats des travaux de Perrin-Glorian (1986), la réussite à cette dernière série de questions est beaucoup plus faible que celle obtenue avec les graduations. Ainsi seulement 158 élèves, soit moins de 40%, répartis dans tous les niveaux scolaires, ont répondu correctement à toutes ces questions. Ces élèves obtiennent un pourcentage de réussite très élevé aux questions comparaisons (94%) ; la capacité à utiliser ce registre de représentation apparaît comme particulièrement discriminante.

Bien que la réussite aux questions de changement de registre de représentation garantisse une bonne performance aux tâches de comparaison, nous pensons pourtant qu'il est plus intéressant d'approfondir l'étude des réponses des élèves qui ne réussissent pas particulièrement bien à effectuer les changements de registre. En effet, si ces tâches sont trop sélectives, les faire réussir par les élèves en difficulté pour qu'ils parviennent à comparer des décimaux n'apparaît pas comme un objectif réaliste. Ainsi, on ne s'étonnera pas du fait que les étudiants titulaires d'une licence de mathématiques réussissent à comparer des nombres décimaux, on n'imaginera pas non plus aider les élèves en difficulté en se proposant de leur faire acquérir ce diplôme… En revanche, on s'attendra à ce que les personnes qui ne sont pas titulaires d'une licence de mathématiques réussissent les tâches de comparaison comme l'ensemble de la population. Nous croisons donc la capacité à comparer des décimaux et les capacités à passer du registre de l'écriture décimale à celui des fractions, des graduations et des quadrillages (ou inversement) de la manière suivante : pour chaque changement de registre de représentation, un groupe fort a été constitué par les élèves n'ayant obtenu aucun échec, et nous analysons comment les élèves qui n'appartiennent pas à ce groupe fort, réussissent aux tâches de comparaison.

En ce qui concerne les changements de registre écriture décimale ↔ écriture fractionnaire, les élèves qui ne font pas partie du groupe fort réussissent sensiblement moins bien que la normale aux comparaisons de décimaux : ils sont 35% à appartenir au groupe faible, au lieu des 14% constatés sur l'ensemble de la population étudiée. Les résultats vont dans le même sens pour le changement de registre écriture décimale / représentation sur une graduation (27% dans le groupe faible au lieu de 14%) et pour le changement écriture décimale ↔ représentation sur un quadrillage (23% dans le groupe faible au lieu de 14%). Ces différences de pourcentages sont significatives au seuil de 1%, d'après les tests de comparaison de proportion réalisés selon la méthode du khi-2.

La capacité à comparer les nombres n'est donc pas indépendante de la capacité à les représenter et à changer de représentation. Le fait d'avoir à comparer des nombres exprimés, ou à exprimer, par différents registres de représentation pourrait donc être favorable à l'apprentissage.

En conclusion de cette étude, trois axes sont retenus pour concevoir un scénario d'aide aux élèves en difficulté pour comparer des décimaux : proposer des situations écrites où les nombres décimaux peuvent être lus et pas seulement entendus, favoriser un traitement sémantique des écritures numériques en faisant exprimer les nombres approximativement et par différents registres de représentation, faire expliciter et critiquer des procédures de comparaison.

3. Un scénario d'aide aux élèves en difficulté pour comparer des décimaux

L'expérimentation d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté pour comparer des décimaux, par leur professeur de mathématiques, pose des problèmes méthodologiques importants : contacter suffisamment de professeurs volontaires et les associer au dispositif sur une partie spécifique et limitée du programme d'enseignement, alors que les aides peuvent être apportées à de nombreuses occasions, tout au long de l'année scolaire. L'évaluation d'un tel dispositif serait difficile à réaliser dans le contexte ordinaire d'enseignement parce que les raisons d'apprendre pour les élèves et le temps de leur apprentissage est très variable. Nous avons, pour cette recherche, choisi un autre mode d'expérimentation. Une enseignante intéressée par ces difficultés d'apprentissage et associée à la recherche, a expérimenté le dispositif d'aide avec une partie des vingt-huit élèves de collège qui ont répondu au questionnaire et qui faisaient partie du groupe faible : ceux dont les erreurs aux comparaisons de deux décimaux donnés à l'écrit étaient massives et dont les parents et les chefs d'établissement ont accepté l'expérimentation. Finalement, onze élèves parmi les 402 ont participé à cette dernière partie de la recherche.

3.1. Description du scénario

Deux séances individuelles d'une demi-heure ont été menées avec chaque élève. Les élèves avaient à comparer des décimaux, ils devaient aussi représenter les nombres à comparer, approximativement ou précisément, et confronter leurs procédures et leurs résultats aux représentations produites d'une part, et à d'autres procédures correctes ou erronées qui leur étaient soumises. Une semaine après, post-test a été réalisé pour évaluer l'effet de ces séances.

3.1.1. Représentation des nombres décimaux

La première séance commence par un court questionnaire de comparaisons de deux décimaux, il s'agit pour l'enseignante de travailler avec l'élève à partir de ses productions. Puis, pour chaque réponse produite, l'enseignante engage l'élève à représenter les nombres comparés. Différents supports de représentation sont proposés : des pièces de monnaie (en lien avec les fractions décimales), des graduations, des carrés quadrillés comme ceux proposés au questionnaire. En outre, du papier blanc, une règle graduée et une paire de ciseaux sont mis à disposition des élèves pour conduire à la comparaison de longueurs. Afin de motiver la représentation des nombres et que l'élève l'utilise pour comparer, l'enseignante pose une question à l'élève, en fonction de sa réponse au questionnaire court du début de séance. Ces questions sont toutes prévues dans le scénario.

Lorsque l'élève s'empare du matériel pour représenter les nombres à comparer, l'enseignante suggère de commencer par une approximation. Ainsi par exemple, pour comparer 8,7 et 8,14, si l'élève choisit d'utiliser une graduation, l'enseignante incitera l'élève à dire si 8,7 est plus près de 8 ou de 9, de même pour 8,14. La réponse de l'élève n'est pas commentée : l'enseignante engage l'élève à poursuivre la représentation.

Voyons maintenant quelles sont les questions posées, c'est-à-dire comment l'enseignante motive la représentation des nombres décimaux et son utilisation pour les comparer.

3.1.2. Explicitation et critique des règles implicites de comparaison

Poursuivons avec l'exemple de la comparaison de 8,7 et 8,14 ; l'élève devait entourer le plus grand des deux nombres. Si l'élève entoure le bon nombre, l'enseignante lui dit : « *L'autre jour, un élève comme toi avec qui je travaillais, m'a dit que comme 7 était plus petit que 14, 8,7 était plus petit que 8,14. Qu'est-ce* *que tu en penses ? Comment pourrais-tu faire pour voir qui a raison avec le matériel qui est là ?* » Si l'élève a entouré le mauvais nombre, l'enseignante cherche d'abord à faire expliciter la procédure de l'élève puis l'amène à représenter les nombres et à utiliser ses représentations pour raisonner. Si l'élève n'arrive pas bien à expliciter sa démarche, l'enseignante lui suggère la règle implicite qu'il a certainement utilisée : « *Un élève m'a expliqué que comme 7 était plus petit que 14, 8,7 était plus petit que 8,14. Qu'est-ce que tu en penses ?* » Lorsque l'élève reconnaît sa démarche, l'enseignante lui propose une procédure contradictoire : « *Un autre élève, comme toi avec qui je travaillais m'a dit que 7 dixièmes c'était pareil que 70 centièmes, et que 70 étant plus grand que 14, c'était 8,7 qui était plus grand que 8,14. Qu'est-ce que tu en penses ? Comment pourrais-tu faire, avec le matériel qui est là, pour voir qui a raison ?* ».

Il ne s'agit donc pas de « refaire » le cours. À aucun moment elle ne rappelle les méthodes enseignées pour comparer deux décimaux, au contraire, elle les met en discussion en introduisant son propos par « *L'autre jour, un élève comme toi avec qui je travaillais, m'a dit que…* ». Ainsi l'élève ne peut pas préjuger l'exactitude du raisonnement proposé. Pour que l'élève accepte de s'engager dans ces tâches assez complexes, et éviter qu'il ne se sente en situation d'échec, l'enseignante choisit de travailler sur les réponses produites sans respecter l'ordre du questionnaire et commence toujours par une comparaison réussie. Sur le modèle présenté, les interventions de l'enseignante sont prévues dans le scénario et adaptées aux comparaisons et aux règles implicites qui peuvent être mises en œuvre.

Ce scénario est celui de la première séance. Durant la deuxième séance, l'enseignante propose une première série de comparaisons où l'élève doit à chaque fois utiliser le matériel avant de décider lequel des deux nombres est le plus grand, puis une série où le matériel n'est pas disponible, mais où l'enseignante demande à l'élève de se référer à une représentation autre que l'écriture décimale pour justifier sa réponse.

3.2. Justification du scénario

Dans sa conception, le scénario d'aide reprend les résultats obtenus grâce aux questionnaires soumis aux adultes et aux élèves. Dans les tâches proposées, les nombres décimaux sont écrits, et ce qui est dit est en relation avec ce qui est écrit. Les consignes données par l'enseignante favorisent un traitement sémantique reposant à la fois sur la recherche de valeurs approchées et sur le changement par registres de représentation. Les questions posées poussent les élèves à expliciter et à critiquer les procédures qu'ils utilisent pour comparer des décimaux.

Un autre type de justification nous semble essentiel : une justification par rapport au travail de l'enseignant. Si les ingénieries didactiques très complètes, construites par Brousseau (1981) ou par Douady & Perrin-Glorian (1986), ne sont pas utilisées dans l'enseignement ordinaire, les manières d'enseigner les nombres décimaux ont tout de même évolué : les programmes ont changé de façon importante et, vingt ans après leur formulation, les propositions de Comiti et Neyret (1979) ont globalement été suivies. Les manuels scolaires sont conformes aux programmes, et le plus souvent les enseignants les suivent pour concevoir leur enseignement. Pourtant les difficultés d'apprentissage des élèves persistent… Les causes qui peuvent être évoquées sont nombreuses, l'une d'entre elles nous semble essentielle : changer l'enseignement, c'est changer les pratiques des enseignants, et les pratiques enseignantes ne se réduisent pas à la composante institutionnelle et à la composante cognitive. La composante médiative est fondamentale : les modalités de travail proposées aux élèves et les interactions verbales en classe comptent énormément dans la relation enseignement - apprentissage. Les pratiques sont aussi personnelles et sociales, elles évoluent lorsqu'un enseignant élargit l'ensemble de ses possibilités d'agir, et pour cela il faut que l'enseignant ne soit pas seul, c'est ce que nous avons montré dans Roditi (2004).

Nous avons donc élaboré un scénario d'aide parce que nous avons cherché à proposer aux enseignants des moyens d'intervenir autrement auprès de leurs élèves, tout en restant dans le cadre des programmes actuels d'enseignement des nombres décimaux, à la fois parce que c'est pour eux une obligation liée à leur métier, mais aussi parce que ces programmes semblent aujourd'hui adaptés. La modalité d'aide est particulière, elle n'est pas fréquente dans les classes : la recherche menée par Chapet-Pariès (2004) montre que les échanges verbaux des enseignants avec leurs élèves laissent peu d'initiative à ces derniers. Autrement dit, nous avons cherché à concevoir des possibilités nouvelles pour l'enseignement, en focalisant non pas sur la composante institutionnelle pour élaborer des propositions de modification de programmes, ni sur la composante cognitive pour concevoir une nouvelle situation d'enseignement-apprentissage, mais sur la composante médiative pour donner aux enseignants des moyens supplémentaires d'aider leurs élèves lorsqu'ils sont en difficulté. Pour intervenir autrement qu'en expliquant une fois de plus la leçon qui n'a toujours pas été comprise, autrement qu'en donnant la réponse ou en la faisant donner par un bon élève, pour intervenir en partant de l'activité de l'élève en difficulté (ce qu'il fait, ce qu'il dit, ce qu'il pense) et en favorisant le développement et l'organisation de ses connaissances sur les décimaux.

Pour terminer cette justification du scénario d'aide, soulignons un dernier argument qui a été un vecteur important dans sa conception, et remercions l'enseignante pour sa contribution à l'élaboration de ces questions. Le lecteur a sans doute pensé que les questions étaient très inspirées des argumentations et contre-argumentations que PIAGET lui-même proposait dans ses entretiens avec les enfants pour évaluer, par exemple, la conservation des quantités discrètes. Nous ne contestons pas l'inspiration, les connaissances des élèves ne se réduisent pas à ce qu'ils peuvent produire, la pensée qui accompagne cette production est importante, y compris la capacité à prendre en compte les arguments d'autrui, pour évoluer ou pour les réfuter. Les raisons qui nous ont fait choisir ces questions tiennent aussi à notre analyse du métier d'enseignant et à ses pratiques ordinaires (Roditi, 2005). Les enseignants interviennent en classe, souvent, et le plus souvent sous la forme d'un échange direct avec l'élève. Les questions élaborées pour le scénario permettent d'une part de laisser l'enseignant prendre des initiatives pour aider ses élèves et permettent aussi, dans la situation de classe, de faire intervenir les autres élèves. L'enseignant peut remplacer « *L'autre jour, un élève comme toi avec qui je travaillais, m'a dit que…* » par l'intervention d'un autre élève de la classe dont il a repéré à l'avance la production et les arguments. Avec ce type d'interventions, prévues, on échappe au modèle trop caricatural selon lequel le bon enseignant serait celui qui propose une bonne situation, et qui se tait pour laisser les élèves construire leurs connaissances par la seule réalisation des tâches proposées avec la situation. Un modèle que l'enseignant peut tenir un moment, lorsque les élèves se confrontent avec le problème mathématique, un modèle dont l'enseignant peut aussi sortir avec une autre alternative que celle du cours magistral.

3.3. Évaluation du scénario

L'enseignante a fait un bilan de ses interventions. Elle retient que la réussite à une comparaison ne prouve pas l'apprentissage et que les explications fournies, même lorsqu'elles sont correctes, sont souvent fragiles lorsqu'elles portent sur l'écriture seulement : « *je dois rajouter un zéro avant de comparer* » ou encore « *le premier chiffre après la virgule est plus grand* ». Les élèves qui ne tiennent pas compte de la partie entière pour comparer des décimaux rectifient toujours spontanément leur réponse lorsqu'elle leur demande de la justifier. Les raisonnements qui reposent sur la règle R1 du « couple d'entiers » sont clairement explicités par ceux qui se trompent et déstabilisent les autres. En revanche, la règle R2 de la longueur de la partie décimale n'est pas explicitée, mais elle est reconnue par les élèves qui l'utilisent.

En ce qui concerne le recours aux représentations des décimaux, l'enseignante a constaté que l'argent était bien manipulé par les élèves, même si la pièce de 0,1 euro n'est pas une pièce de 1 « décime » mais une pièce de 10 centimes c'est-à-dire 0,10 euro. En revanche, les représentations graphiques posaient problème pour six des onze collégiens : ils traçaient des segments de 9,4 cm pour représenter 8,14 en comptant 14 graduations après 8.

Le post-test proposait 15 comparaisons de décimaux analogues à celles des 12 questions du premier questionnaire que nous considérons ici comme un pré-test. L'évolution éventuelle du nombre moyen d'erreurs permet d'évaluer les effets de l’aide apportée par l’enseignante. Les 11 élèves qui ont bénéficié de l’aide avaient commis 47 erreurs aux 12 questions, ce qui correspond à 35,6% de réponses fausses. Au post-test, sur les 15 questions, une seule erreur a été commise, cela correspond à 0,6% de réponses fausses. Les élèves ont donc réalisé un progrès : ils ne font pour ainsi dire plus de faute en comparant deux décimaux. Un test de comparaison de proportion au seuil de 1% a été réalisé selon la méthode du khi-2, il confirme que la différence de pourcentage est significative. Néanmoins, il est préférable de rester prudent quant à ces résultats pour plusieurs raisons qui tiennent à la méthodologie mise en œuvre. Le post-test a été réalisé seulement une semaine après les séances d’aide, les représentations évoquées lors de ces séances être encore très présentes dans l’esprit des élèves. Le déroulement du scénario d’aide a été confié à une seule enseignante, si bien qu’on ne peut exclure certains facteurs personnels qui ne sont pas pris en compte dans la recherche. Bien que tous en grande difficulté et ayant réalisé des progrès important, le nombre d’élèves qui ont suivi le dispositif d’aide est faible, et les résultats demandent à être confirmé avec un effectif plus important. Enfin, la transposition en classe du scénario d’aide n’a pas été réalisée, et malgré le soin apporté dans sa conception pour le rendre utilisable par les enseignants, une évaluation dans les conditions ordinaires d’enseignement reste nécessaire.

Conclusions et perspectives

La procédure de comparaison des nombres décimaux ne repose pas seulement sur un traitement syntaxique de l’écriture décimale, elle repose aussi simultanément sur un traitement sémantique qui met en jeu l’ordre de grandeur des nombres à comparer. Pourtant, l’enseignement propose souvent, comme seule approche, un traitement de l’écriture numérique qui vise à comparer les chiffres de la partie décimale ou à compléter par des zéros pour que les parties décimales des décimaux à comparer aient le même nombre de chiffres. Les élèves en difficulté utilisent des règles implicites inexactes, par exemple traiter la partie décimale comme on traite un entier, ce qui les conduit à affirmer que 3,14 est supérieur à 3,5 au motif que 14 est supérieur à 5. D’ailleurs, lorsque les nombres sont donnés oralement, en disant la partie entière, puis « virgule », puis la partie décimale, les erreurs des élèves en difficultés sont beaucoup plus nombreuses que lorsque les nombres sont donnés par écrit.

La capacité à comparer des décimaux dépend aussi de la qualité de la connaissance de ces nombres : non seulement les élèves qui savent changer de registre de représentation des nombres décimaux les comparent sans se tromper, mais ceux qui ne savent pas bien le faire se trompent beaucoup plus souvent. Lorsque les nombres à comparer sont présentés dans une situation, les élèves en difficulté réussissent mieux les comparaisons, comme s’ils utilisaient la situation pour donner du sens aux nombres à comparer. Au contraire, les élèves qui n'ont pas de difficulté ne réussissent pas mieux, voire même seraient parfois gênés pour gérer ces informations supplémentaires. Enfin, les élèves les plus âgés réussissent mieux que les jeunes ; la capacité à comparer des nombres décimaux évolue donc favorablement avec l'âge et l'utilisation de ces nombres dans des contextes variés. Cependant, il reste des élèves en difficulté, même parmi les plus âgés, qui ne pourront pas progresser sans une aide spécifique.

La compréhension des difficultés rencontrées par certains élèves laisse supposer qu'une aide efficace pourrait leur être apportée en les conduisant à changer de registre de représentation des décimaux (monnaie, graduation, etc.) et à mettre en relation ces représentations des nombres et différentes procédures pour comparer les décimaux. Une expérimentation menée par une enseignante avec les élèves de 11-12 ans les plus en difficulté laisse penser qu'un tel travail est efficace. Une expérimentation complémentaire portant sur plus d'élèves, avec plus d'enseignants, réalisés dans les conditions ordinaires de la classe, et avec des évaluations à court, moyen et long terme reste nécessaire pour confirmer ces premiers résultats.

Bien que cette recherche ait mis au jour des éléments nouveaux sur la compréhension de l'activité de comparaison des décimaux, par des adultes qui n'éprouvent pas de difficulté comme par des élèves qui en rencontrent, elle ne propose pas directement de situation nouvelle pour enseigner les nombres décimaux et leur comparaison. Le scénario d'aide a en effet été élaboré principalement en articulant les résultats de recherches précédentes menées depuis plus de vingt ans en didactique des mathématiques sur ce contenu particulier. Pourtant, une partie de cette recherche porte directement sur la relation enseignement apprentissage, elle focalise sur la composante *médiative* des pratiques enseignantes en proposant aux enseignants des moyens supplémentaires d'aider leurs élèves. Des modalités d'interaction entre l'enseignant et ses élèves, précisément définies, ont été expérimentées. Elles offrent des possibilités nouvelles pour intervenir auprès de ceux qui restent en difficulté après l'institutionnalisation des procédures à mettre en œuvre pour comparer des nombres décimaux, elles visent simultanément le développement et l'organisation de leurs connaissances sur ces nombres.

Annexe 1 : Liste des nombres donnés à comparer à 0,56

0,001	0,0057	0,097	0,198	0,2	0,25	0,32	0,4	0,49		
0,5199	0,5258	0,549	0,557	0,5599	0,5601	0,563	0,571	0,5942	0,5964	
0,6001	0,63	0,64	0,72	0,784	0,8	0,87	0,9	0,92	0,922	
1,023	1,1143	1,1191	1,254	1,56	1,583	2	3,23	4,55	7,9328	9,634
55,017	330,11									

Annexe 2 : Extraits des 51 questions du questionnaire

Entoure le nombre le plus GRAND

1,97 et 4,28	8,7 et 8,14	12,27 et 12,1	14,036 et 14,17
12,15 et 3,704	1,21 et 1,4	11,38 et 11,478	3,3 et 3,04
15,08 et 7,956	2,39 et 2,6	17,54 et 17,625	28,125 et 28,0326

Réponds aux questions suivantes

Manu mesure 1,21m. Léa mesure 1,4m. Qui est le plus grand ?

Lors d'une épreuve de saut en longueur, Pablo a sauté 3,3m et Bixente a sauté 3,04m. Qui a sauté le plus loin ?

Le segment [AB] mesure 12,15cm. Le segment [CD] mesure 3,704cm. Quel est le segment le plus grand ?

Léa et Manu comparent leurs moyennes. Celle de Manu est 14,17 et celle de Léa est 14,036. Qui a la meilleure moyenne ?

La moyenne de Pablo en Espagnol est 15,08 et celle de Bixente est 7,956. Qui a la meilleure moyenne ?

La moyenne en 6^{e}A est 11,38. La moyenne en 6^{e}B est 11,478. Quelle classe a la meilleure moyenne ?

Pour s'acheter des bonbons, Léa dispose de 2,39 euros et Manu dispose de 2,6 euros. Qui pourra s'acheter le plus de bonbons ?

Dans son porte-monnaie, Bixente a 1,97 euros. Pablo a 4,28 euros. Qui a le plus d'argent ?

Réponds aux questions suivantes

La réponse exacte à un problème est 10,24.Des élèves ont fait ce problème, voici leurs résultats : Juliette a trouvé 10,2399, Adrien a trouvé 10,241, Thibaud a trouvé 10,238 et Julien a trouvé 10,25.
Qui est l'élève qui a trouvé le résultat le plus proche du résultat exact ?
Qui est l'élève qui a trouvé le résultat le plus éloigné du résultat exact ?

Bibliographie

ADJIAGE R. & PLUVINAGE F. (2007), An experiment in teaching ratio and proportion, *Educational Studies in Mathematics* **65**, 149–175.

BOLON J. (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école - collège*, Thèse de didactique des mathématiques de l'Université Paris 5.

BROUSSEAU G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **1.1**.

BROUSSEAU G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **2.1**, 37-127.

BROUSSEAU G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **4.2**, 165-198.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage, Grenoble.

CHAPET-PARIÈS M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **24.2-3**, 251-284

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* **19.2**.

COLLET M. (2003), Le développement du système en base 10 chez des élèves de 2ème et de 3ème année primaire, une étude exploratoire, *Éducation et francophonie* **31.2**, 218-241.

COMITI C. & NEYRET R. (1979), À propos des problèmes rencontrés lord de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen, *Grand N* **18**, 5-20.

DEBLOIS L. (1996), Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16.1**, 71-127.

DEHAENE S. & COHEN L. (1995), Towards an anatomical and functional model of number processing, *Mathematical Cognition* 1, 83-120.

DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison école - collège : Nombres décimaux*, Brochure n°62, Paris : IREM de Paris 7.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7.2.**

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

FAYOL M. (1990), *L'enfant et le nombre*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

GRISVARD C. & LEONARD F. (1981), Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs, *Bulletin de l'APMEP* **327**.

GRISVARD C. & LEONARD F. (1983), Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux, *Bulletin de l'APMEP* **340**.

HINRICHS J.V., YURKO D.S. & HU J.M. (1981), Two-digit number comparison: Use of place information. *Journal of Experimental Psychologie : Human Perception and Performance* **7.4**, 890-901.

MELJAC C. (2001), Piaget, Broca, Poincaré, Mc Closkey et quelques autres, in *Troubles du calcul et dyscalclies chez l'enfant*, (Eds Van Hout A. & Meljac C.), 118-135, Paris : Masson.

NEWMAN, R. S. & BERGER, C. F. (1984). Children's numerical estimation: Flexibility in the use of counting. *Journal of Educational Psychology*, 76.1, 55-64.

NEYRET R. (1979), Décimaux, *Grand N* **17**, 5-20.

PERRET J.-F. (1985), *Comprendre l'écriture des nombres*, Peter Lang, Berne.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1986), Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège, *Petit x* **10**.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* **2.4**, 505-528.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2005), A Cross-Analysis of the Mathematics Teacher's Activity. An Example in a French 10th-Grade Class, *Educational Studies in Mathematics* 59.1-3, 269-298.

ROBERT A. (2005), Quelles différences y a-t-il…? Exemples d'analyses didactiques d'exercices et d'activités d'élèves, *Bulletin de l'APMEP* **457**, 226-238.

RODITI E. (2000), Ordre de grandeur et multiplication des décimaux, *Bulletin vert APMEP* **431**, 719-727.

RODITI E. (2004), *Former par la résolution de problèmes professionnels,* Cahier DIDIREM n°48, Paris, IREM de Paris 7.

RODITI E. (2005), Les pratiques enseignantes en mathématiques – Entre contraintes et liberté pédagogique, L'Harmattan, Paris.

VYGOTSKI L. (1985), *Pensée et langage*, Paris, Messidor.

ÉRIC RODITI

Université Paris 5 – Sorbonne, équipe EDA (Éducation et apprentissages)
24, rue de la Justice 75020 Paris - France
eric.roditi@paris5.sorbonne.fr